JGP - Vol. 4, n. 2, 1987

Cosmologies primordiales
Leurs variété, leurs constraintes

NATHALIE DERUELLE

Laboratoire de Physique Théorique
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie, 75005, Paris

Abstract. *This review paper presents some ingredients of the «new cosmology» that arose from the recent developments of high energy physics: non standard matter, extra dimensions and corrections to the Einstein-Hilbert lagrangian. Their cosmological effects will be illustrated by some examples. We shall insist on the theoretical constraints implied by the requirement that they should yield cosmological models without manifest pathologies and tending to the standard scenario.*

Résumé. *Cet article de revue présentera quelques-uns des ingrédients de la «nouvelle cosmologie» issue des récents développements de la physique des hautes énergies: matière non-standard, dimensions supplémentaires et corrections au lagrangien d'Einstein-Hilbert. On illustrera leurs effets cosmologiques par quelques exemples et on insistera sur les contraintes théoriques qu'impose l'exigence qu'ils engendrent des modèles cosmologiques sans pathologie manifeste et qui puissent tendre vers le scénario standard.*

I. INTRODUCTION: COSMOGONIE 1987

Les symétries des théories actuelles qui visent à unifier les interactions électro-faible et forte [1] ne peuvent se manifester qu'à des températures extrêmement élevées ($\approx 10^{14}\ GeV$) hors de portée de tout laboratoire terrestre. C'est pourquoi les physiciens des hautes énergies se sont tournés vers un laboratoire d'un genre

Key-Words: *Cosmology high energy physics.*
1980 Mathematics Subject Classification: *83 F 05.*

nouveau, à savoir l'univers lui-même (1). Selon la lettre du scénario standard en effet [2 - 3], l'univers a émergé d'une explosion initiale et a traversé, quelque 10^{-35} sec après le Big-Bang, une phase suffisamment chaude pour être directement régie par les lois de ces théories grand-unifiées. C'est donc cette ère primordiale qui sert maintenant de cadre naturel à leur étude.

Mais l'univers ne se réduit pas à un thermostat passif qui servirait d'arène à la physique des hautes énergies. Son évolution même, à travers les équations d'Einstein, dépend de son contenu matériel. Et comme ce dernier n'est plus nécessairement décrit par les équations d'état ordinaire des fluides parfaits des modèles de Friedman, l'histoire de cette ère primordiale doit être remaniée. Cela, plus la volonté d'expliquer des points laissés pendants par le scénario standard (comme les raisons de l'isotropie et de la platitude de l'univers actuel), ont conduit à décrire l'ère primordiale par de nouveaux scénarios, basés pour la plupart sur la notion d'inflation [4 - 7].

Au-delà maintenant des théories grand-unifiées, à des températures de l'ordre de celle de Planck ($\approx 10^{19}\, GeV$), la gravitation doit s'unifier aux autres interactions et les théories de gravité quantique [8 - 9] et de supercordes [10 - 11] prennent le relais de la relativité générale. Sans aller jusqu'à cette phase plankienne, encore empyréenne, il reste une vaste plage de températures qui a dû être régie par les limites de «basse» énergie de ces théories du «Grand-Tout». Là encore la cosmologie primordiale peut servir de cadre naturel à l'étude de ces théories-limites puisque, selon la chronologie standard, les températures extrêmes où elles s'appliquent ont régné dès que l'univers eut émergé de l'ère planckienne, antérieure à 10^{-44} sec.

Or, bien que l'obtention de ces théories-limites, où champ gravitationnel et matière retrouvent leur individualité, théories supersymétriques de la gravité [12 - 13] pour la plupart, n'ait pas encore toute la rigueur désirable, il semble néanmoins que la description einsteinienne du champ gravitationnel devra être modifiée quant à deux aspects fondamentaux au moins. D'une part en effet ces théories prédisent des corrections au lagrangien d'Einstein-Hilbert [8 - 11], qui modifient la relation entre la géométrie de l'espace-temps et son contenu matériel. D'autre part elles sont souvent formulées dans des espaces-temps ayant plus de quatre dimensions, radical changement de perspective [14 - 16]. Là encore donc, la rétroaction sur l'histoire de l'univers de ces modifications à la relativité générale doit être prise en compte [7].

On voit donc les trois étapes dans le développement des spéculations: descrip-

---

(1) Par «univers» il faut bien évidemment entendre non pas l'univers observé mais ses représentations théoriques dont on ne discutera par ici l'adéquation au réel.

tion de la matière, à partir de 10^{14} GeV, par des tenseurs d'énergie-impulsion non-standard issus des théories grand-unifiées; puis, à l'approche de 10^{19} Gev, corrections au lagrangien d'Einstein-Hilbert et introduction éventuelle de dimensions supplémentaires; enfin au-delà de 10^{19} GeV, règne, que nous n'aborderons pas, de la cosmologie quantique.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que de tels remaniements du scénario standard ont ponctué toute l'histoire de la gravitation relativiste. Ainsi la constante cosmologique, premier exemple de tenseur énergie-impulsion non-standard (mais plutôt considérée à l'époque comme une correction d'«ordre zéro» aux équations d'Einstein) a été introduite par Einstein lui-même dès 1917 [17]; quant aux corrections quadratiques au lagrangien d'Einstein-Hilbert et à l'introduction de dimensions supplémentaires elles remontent aux années 20, à Weyl [18] et Eddington [19] d'une part et à Kaluza [20] et Klein [21] d'autre part. Ceci étant, même si ces ingrédients sont bien connus, ils entrent maintenant dans l'élaboration d'une «nouvelle cosmologie» qui concerne des domaines d'énergie sans aucune commune mesure avec ceux que l'on contemplait jusqu'à récemment, et dont l'émergence apparaît comme l'aboutissement obligé de l'évolution récente de la physique des hautes énergies.

Dans cet article je présenterai quelques-uns des modes d'emploi de ces ingrédients dans le but, non pas tant d'exposer en détail tel ou tel modèle que de montrer la fertilité de ce champ d'investigation. J'insisterai aussi sur le fait que les modèles d'évolution cosmique engendrés par cette nouvelle cosmologie doivent satisfaire à de sévères contraintes si l'on veut pouvoir les raccorder, à la limite des très «basses» températures, au scénario standard. Et ce sont en fin de compte l'existence et la rigidité de ces contraintes théoriques qui donnent leur raison d'être à ces cosmologies primordiales, à défaut de point de contact avec l'univers réellement observé.

II. DE LA MATIERE NON-STANDARD

1. Le paradigme du champ scalaire

Quand Einstein en 1917 [17] rajouta une constante cosmologique à ses équations de champs afin qu'elles admettent une solution cosmologique statique, il remplit en fait l'univers d'un fluide parfait ténu satisfaisant à l'équation d'état non-standard $p = -\rho$. Autre exemple historique, celui de Hoyle [22] qui conjectura l'existence d'un «champ-C», à énergie non conservée impliquant une création continue de matière, qui expliquait comment l'univers pût à la fois être en expansion et dans un état stationnaire [23].

De nos jour par contraste la considération de matière non-standard n'est plus la conséquence de principes esthétiques sur l'ordre du cosmos: elle est déduite de la physique des hautes énergies; et si donc elle découle de préjugés esthétiques, ils concernent cette fois le microcosme. Les théories grand-unifiées [1], de supersymétrie [12], de supergravité [13], les limites de basse énergie de la gravité quantique [8 - 9] et des supercordes [10 - 11] fournissent une foison de lagrangiens matériels dont il est devenu tâche quasi routinière d'étudier les implications cosmologiques [4 - 7].

Un fil d'Ariane utile dans cette littérature est le paradigme du champ scalaire couplé à la gravitation auquel souvent ces théories se conforment et dont le lagrangien s'écrit:

$$L = -\frac{1}{2}(1 - \zeta\phi^2/6)R + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - V(\phi) \tag{1}$$

où le couplage $(1 - \zeta\phi^2/6)$ du champ scalaire ϕ à la courbure R – le seul qui introduise une constante ζ sans dimension – peut s'interpréter en terme de constante de gravitation effective variable, $G_{\text{eff}} = G/(1 - \zeta\phi^2/6)$ où on a posé $G = 1$; ($\zeta = 0$ et $\zeta = 1$ correspondent aux couplages minimal et conforme respecvement). La physique du problème repose sur le choix du potentiel $V(\phi)$ (un polynôme en ϕ par exemple) qui caractérise la théorie à l'étude.

Construire un modèle cosmologique de la théorie consiste alors à résoudre les équations de champs déduites de (1) dans un espace-temps cosmologique, que l'on suppose le plus souvent spatialement homogène et isotrope. Le problème est ainsi ramené à l'étude de deux équations différentielles ordinaires couplées du second ordre déterminant les évolutions temporelles du champ ϕ et du facteur d'échelle de la métrique (que, ultime simplification, on peut choisir conformément plate).

Malgré les caractères réducteurs à la fois du lagrangien (1) et du cadre cosmologique de Robertson-Walker dans lequel on l'étudie, la variété des potentiels $V(\phi)$ intéressants permet de multiples variations [1, 4 - 7], et la possibilité de couplage (ζ non nul) ouvre de nombreuses perspectives, encore peu explorées [24 - 27]. Ceci étant, des lagrangiens plus savants que (1) peuvent être pris comme point de départ (on en verra un exemple plus bas); des espaces-temps anisotropes ou inhomogènes peuvent être considérés [28 - 29]; enfin les champs matériels peuvent être quantifiés [30] et la rétroaction de la polarisation du vide qui en découle prise en compte [31]. Il ne peut donc être question ici de rendre justice à tous les travaux qu'a suscités cette ligne de recherche et les références citées [1, 4 - 7, 24 - 31] ne peuvent qu'introduire à la littérature sur le sujet.

Parmi les nombreuses questions auxquelles ces modèles sont soumis, j'en retiendrai ici deux:

Tout d'abord, le modèle échappe-t-il à la singularité initiale inhérente au scénario standard? Les champs de matière introduits par les théories unifiées peuvent en effet éventuellement violer les conditions sur l'énergie qui entrent dans les hypothèses des théorèmes de Penrose et Hawking sur l'inéluctable apparition de singularités en relativité générale [3]. La constante cosmologique en est l'exemple le plus simple; il en est bien d'autres [32]. Mais la violation d'une condition sur l'énergie, si elle est nécessaire, n'est pas suffisante pour éviter la singularité initiale. On peut montrer par exemple sur un modèle simple du type (1), isotrope [33] ou non [34], que la probabilité pour que l'univers rebondisse est de l'ordre du rapport de ses rayons minimal et maximal, soit inférieure à 10^{-60} si l'on prend le rayon minimal égal à la longueur de Planck; c'est donc la durée pendant laquelle la condition est violée, comparée à l'âge de l'univers, qui, en fait, importe [35]. Par ailleurs il faut s'assurer que les modèles cosmologiques non singuliers construits ne partagent pas le vice rédhibitoire du modèle statique d'Einstein [36] en développant des instabilités lorsqu'on perturbe leurs symétries ou leur contenu matériel [37]. La quête de cosmologies génériquement sans singularité est donc souvent décevante.

Un seconde question à laquelle soumettre les modèles est de savoir s'ils admettent une période d'inflation [38], c'est-à-dire de croissance exponentielle (ou du moins très rapide [39]) du facteur d'échelle de l'univers, qui expliquerait les points laissés sans réponse par le scénario standard, comme ceux de l'isotropie et de la platitude de l'univers actuel par exemple. La carrière des scénarios inflatoires débuta par quelques retentissants succès car les potentiels $V(\phi)$ fournis par les théories grand-unifiées [1, 6] semblaient permettre la construction de modèles cosmologiques dont l'évolution fût non seulement quasiment indépendante des conditions initiales [40 - 45] mais expliquât aussi l'origine des fluctuations de densité nécessaires à la formation des galaxies [46 - 47]. L'enthousiasme fut ensuite tempéré par l'apparition de difficultés, la plus sérieuse étant que les fluctuations de densité naturellement prédites étaient beaucoup ($\approx 10^6$ fois) trop grandes pour être compatibles avec l'isotropie observée du rayonnement cosmique à $3°K$ [4, 6, 48 - 51]. Leur résolution a dû passer par un choix artifiiel des paramètres laissés libres par les théories [52], voire par la postulation de l'existence de champs sans rôle unitaire, dont la seule justification est d'engendrer l'inflation [53]. Ainsi, la possibilité d'inflation compatible avec un raccordement naturel au scénario standard (ce qu'on a appelé «un élégante sortie»), qui semblait au début une propriété assez commune des modèles cosmologiques issus des théories grand-unifiées, apparaît maintenant comme une forte contrainte sur les théories [54].

Il apparaît donc que des exigences telles que celles dont il vient d'être question, absence de singularité de courbure, possibilité d'inflation etc., compatibles à la limite des basses énergies avec le scénario standard, ont, qu'on les trouve impératives ou non, au moins le mérite d'être contraignantes et peuvent servir, à défaut de mieux, à juger les modèles, voire les théories qui les sous-tendent.

2. Un exemple de confrontation: supergravité sans échelle et cosmologie

La théorie de supergravité sans échelle, dont les vertus en tant que théorie unitaire ne sont pas à rappeler ici [55], a été présentée comme un bon candidat de limite de basse énergie des théories de supercordes [56]. Ses propriétés cosmologiques ont été explorées récemment par Antoniadis et al. [57], dans le but de déterminer si ses modèles cosmologiques possédaient ou non une singularité initiale (la «première question» dont il a été fait mention plus haut). Ils concluent qu'elle pouvait être évitée, mais au prix d'un changement de signe dans le couplage d'un des champs de supergravité au champ de gravitation, une pathologie qui signale une limite de validité de la théorie [58]. Mais ces auteurs se sont limités à la recherche de solutions très particulières. C'est pourquoi nous avons étudié le problème plus en détail pour arriver à une conclusion qui conforte l'analyse précédente et indique que la théorie de supergravité sans échelle, du moins dans sa plus simple incarnation, conduit à des modèles d'univers apparemment pathologiques [59].

La partie bosonique du lagrangien, dans le cas simple d'une symétrie $SU(1,1)/U(1)$ du champ scalaire de la théorie, est donné par une variante du paradigme (1) [57]:

$$L = -\frac{1}{2}(1-\Delta^2/6)R + \frac{1}{2}(\partial_\alpha \Delta)^2 + \frac{1}{2}\Delta^2(\partial_\alpha \vartheta + A_\alpha)^2 - 3(A_\alpha)^2 + L_m \tag{2}$$

où Δ et ϑ sont l'amplitude et la phase du champ scalaire (le dilaton), conformément couplé à la courbure scalaire R, où A_α est un champ auxiliaire sans dynamique propre (ses dérivées n'apparaissent pas dans le lagrangien) et où L_m représente la matière conventionnelle éventuellement présente dans le modèle, que l'on décrira comme un fluide parfait.

Comme on le voit, le signe du coefficient de la partie hilbertienne du lagrangien, R, c'est-à-dire le signe de la constante de gravitation effective, dépend de celui de $(1-\Delta^2/6)$. Mais si $\Delta^2 = 6$ en un point p les équations pour le champ de gravitation deviennent singulières en p et ne permettent pas en général de déterminer l'évolution ultérieure du champ. Dans une version quantique de la théorie cette pathologie se traduit par l'apparition de tachyons et de fantômes [58]. Il faut donc imposer la condition de «positivité de la gravité», à savoir que $\Delta^2 \leqslant 6$ dans tout l'espace temps.

L'étude des propriétés cosmologiques de cette théorie débute naturellement par le cas le plus simple: celui d'un modèle spatialement homogène et isotrope (où l'évolution du champ de gravitation se réduit à celle d'un facteur d'échelle) et sans matière ($L_m = 0$). On montre alors [59] que les équations de champs déduites de (2) s'intègrent exactement. Dans le cas d'un modèle fermé par exemple on trouve que le facteur d'échelle est une fonction trigonométrique du temps conforme et oscille entre des valeurs minimale et maximale que l'on choisit respectivement de l'ordre des longueurs de Planck et de Hubble (en toute rigueur le rayon minimal doit être très supérieur à la longueur de Planck puisque le théorie ne prétend pas décrire l'ère proprement planckienne). Quant aux champs de supergravité ils oscillent avec la même période. Le modèle n'a donc pas de singularité de courbure [57], grâce en fait à la présence du champ auxiliaire A^α qui crée une densité d'énergie négative compensant l'attraction gravitationnelle. La condition forte sur l'énergie est d'ailleurs, comme il se doit, violée, puisque $R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \leqslant 0$ lorsque l'univers traverse une de ses phases planckiennes, période où son rayon avoisine sa valeur minimale. Ce qui est surprenant, et rend le modèle a priori intéressant, c'est qu'une telle violation pendant une si brève fraction du cycle d'évolution est suffisante pour prévenir l'apparition d'une singularité. En cela le modèle se distingue du cas cité plus haut [33, 34] d'un champ scalaire minimalement couplé à la gravitation où l'absence de singularité n'est possible qu'au prix d'un ajustage des constantes du modèle atteignant une précision de 10^{-60}, le rapport des rayons minimal et maximal de l'univers. (Le carré de ce nombre n'est autre que la constante cosmologique en unités de Planck).

Mais, retour de manivelle peut-être, on a toujours $\Delta^2 > 6$ pendant une partie des cycles d'évolution; et pour que cette violation de condition de «positivité de la gravité» reste confinée aux phases planckiennes des cycles, des ajustages extrêmement fins des constantes d'intégration du modèle sont nécessaires. Le problème de la petitesse de la constante cosmologique, précédemment évité, fait ainsi sa réapparition à un détour inattendu de la théorie. Mais même en acceptant de procéder à cet ajustage, il n'en reste pas moins que $\Delta^2 > 6$ lorsque l'univers atteint son rayon minimal et la condition de positivité de la gravité reste, quoi qu'on fasse, violée, même si ce n'est que durant les phases planckiennes des cycles de l'évolution [57].

Si donc on exige que la condition de positivité de la gravité soit effectivement remplie en tout point de l'espace-temps, le modèle est pathologique car ne fournit pas de description acceptable de la période immédiatement post-planckienne, ce qu'il était pourtant censé accomplir.

On peut à ce stade tenter de «sauver les phénomènes» en rajoutant des épicycles au modèle, que ce soit sous forme de matière conventionnelle diversement couplée au champ scalaire et satisfaisant à des équations d'état variées ou sous forme d'anisotropies de la géométrie [59]. Sans entrer ici dans les détails, disons que la conclusion reste inchangée: les modèles cosmologiques engendrés par la supergravité sans échelle (du moins par sa partie bosonique et dans le cas de symétrie du dilaton le plus simple) peuvent génériquement éviter la singularité de courbure inhérente au scénario standard, grâce à la présence du champ auxiliaire, mais sont pathologiques dans la mesure où l'évolution du dilaton périodiquement change le signe du couplage de la matière à la gravité.

Pour tempérer cette conclusion on peut remarquer que, pour tous les modèles homogènes et isotropes considérés en tous cas, ce changement de signe du couplage n'implique en fait aucune pathologie du comportement classique des champs, qui, comme on l'a dit, oscillent sans heurts. Ce n'est que dans les cas de moindre symétrie, lorsque l'étude détaillée de la dynamique du modèle requiert l'emploi de toutes les composantes des équations du champ de gravitation que des problèmes de causalité peuvent éventuellement surgir, ainsi que le laisse prévoir la non-constance du signe du coefficient de R dans le lagrangien (2).

Quelle que soit donc la fortune future de cette théorie de supergravité sans échelle, il semble en tous cas qu'elle ne réussisse pas à fournir d'élémentaires modèles cosmologiques parfaitement satisfaisants. On voit ainsi sur cet exemple que la confrontation de théories unifiées introduisant de la matière non-standard et de la cosmologie peut être un puissant révélateur de certaines de leurs limitations.

III. DES DIMENSIONS SUPPLEMENTAIRES

1. Un changement de perspective radical

Kaluza [20] puis Klein [21] furent les premiers dans le contexte d'une physique relativiste à ajouter des dimensions supplémentaires à l'espace-temps, cet artifice mathématique permettant une description unifiée des champs électromagnétique et gravitationnel en terme d'une métrique penta-dimensionnelle. Après une première phase de développement dans les années cinquante [60] avec l'apparition des théories plus riches de Jordan [61] et Thiry [62], ce programme, dont le but dans les années soixante devint d'identifier non plus seulement le groupe de jauge $U(1)$ de l'électromagnétisme [63] mais toutes les symétries des lois de la physique [64 - 65] à des isométries d'espace-temps, connait actuellement une période de renouveau grâce au développements des théories des modèles duaux [10], de supergravité [12 - 13] et, plus récemment, de supercordes [10 - 11]. Les revues sur ces théories de Kaluza-Klein deuxième manière sont nombreuses [13 - 16]; on y trouvera des études critiques de leurs potentiels d'unification.

Je n'insisterai ici que sur un point. Pour les relativistes de la première génération unitaire l'espace-temps multidimensionnel était un objet abstrait non chargé de représenter une réalité physique, un rôle dévolu à un sous-espace de quatre dimensions, variété quotient par le groupe d'isométries [60]; plus récemment cette même conviction motiva les efforts de réduction des théories de supergravité D-dimensionnelles à des théories effectives ayant pour cadre un espace-temps à quatre dimensions [66]. Mais la conception de l'espace a depuis changé: dans l'approche actuelle l'univers *est* multi-dimensionnel [67]; et si cette modification «ontologique» du statut des dimensions supplémentaires se traduit, banalement, par une dépendance de la métrique dans toutes les coordonnées d'espace-temps, et non plus seulement quatre [16], le changement de perspective est cependant loin d'être innocent.

Mentionnons d'abord pour mémoire les arguments classiques en faveur d'une tridimensionalité de l'espace. On sait en effet depuis longtemps [68] qu'il existe d'heureuses connivences entre certaines «bonnes» propriétés des lois de la physique et la structure mathématique de l'espace tri-dimensionnel dans lequel ces lois sont formulées. Ne prenons qu'un exemple [69 - 70]: le potentiel de Newton n'explique les trajectoires képlériennes et ne satisfait au capital «principe d'effacement» [71] (c.à.d. au théorème de Birkhoff) que si l'espace a trois dimensions, une conclusion qui demeure lorsque l'on considère la métrique de Schwarzschild généralisée, solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein à D dimensions [72]. Mais l'échappatoire à ces arguments, dont on peut d'ailleurs contester la valeur explicative [73] et regretter le parfum anthropique [70], est facile car ils reposent sur la considération d'espaces du type $\mathbb{R}^n$; or les dimensions supplémentaires, si elles sont réelles, ne sont pas observées.

En fait c'est cette inobservabilité des dimensions supplémentaires qui, ironiquement, pose problème. La stratégie la plus commune pour en rendre compte consiste à supposer que l'espace-temps est «compactifié» et a localement la topologie d'un produit direct d'un espace-temps «extérieur», celui de Minkowski par exemple, et d'une variété euclidienne «interne» compacte que l'on rend inobservable en imposant que l'étalon de longueur naturel y soit beaucoup plus petit que dans l'espace-temps extérieur [14 - 16]. Mais alors deux questions se posent, sur lesquelles les théories multidimensionnelles ont jusqu'à présent achoppé [14 - 16]. D'abord, ces «états fondamentaux», espaces-temps qui décrivent le vide physique, sont-ils solutions des équations de champs? Cela devient en effet nécessaire dans la mesure où l'on demande à ces équations, non plus de servir de simple étape vers une théorie effective en quatre dimensions, mais de décrire l'évolution des champs dans un espace-temps réellement multidimensionnel. Comme on le verra sur quelques exemples c'est là une contrainte très forte à la fois sur les choix possibles d'états fondamentaux et sur les théories elles-mêmes. Une seconde question, plus essentielle, est pourquoi les dimensions supplémentaires sont-elles inobservables, ou, moins ambitieusement, comment ont-elles pu le devenir? Une réponse satisfaisante consisterait par exemple à exhiber un modèle cosmologique où l'espace, initialement sans dimensions et sans groupe d'isométries privilégiés, se «compactifierait», c.à.d. tendrait vers un des états fondamentaux précédents, au cours de son évolution dynamique [15]. Les symétries de la matière émergeraient alors progressivement après une phase où des quantités comme la charge électrique par exemple ne seraient pas conservées [74]. Les tentatives en ce sens sont nombreuses; j'en présenterai quelques-unes. Mais aucun résultat concluant n'existe encore.

2. La question de l'état fondamental

Dans la perspective initiale d'unification à la Kaluza-Klein le lagrangien d'Einstein-Hilbert D-dimensionnel, éventuellement augmenté d'une constante cosmologique nue,

$$L = \alpha_0 + \alpha_1 R \tag{3}$$

devrait être la pierre unique sur laquelle bâtir la théorie classique unifiée des interactions. Imposer maintenant qu'un etat fondamental, produit local $M_4 \times V_{D-4}$ de l'espace-temps de Minkowski et d'une variété euclidienne compacte, soit solution des équations de champs déduites de (3) implique qu'à la fois la constante cosmologique nue α_0 et le tenseur de Ricci R_{ab} de la variété interne doivent être nuls [14 - 15]. L'absence de constante cosmologique n'est que moindre mal mais si l'espace interne est Ricci-plat il ne peut admettre au mieux que des champs de vecteurs de Killing à dérivée covariante nulle qui n'engendrent que des groupes de jauge abéliens [75 - 77]. C'est là un coup fatal à une théorie qui vise à décrire les symétries de la matière (aux groupes de jauge non-abéliens, exception faite de l'interaction maxwellienne) en termes de symétries d'espace-temps. Remplacer M_4 par un espace-temps anti de Sitter ne fait qu'aggraver la situation car la variété interne, alors Ricci-négative ($R_{ab} = - \lambda^2 g_{ab}$), n'a pas de symétries continues du tout [75 - 77]. Un espace-temps extérieur de de Sitter rend la variété interne Ricci-positive et donc potentiellement riche de symétries mais la constante cosmologique effective de l'espace-temps extérieur est alors telle que l'étalon naturel de longueur y devient du même ordre que celui de la variété interne qui donc n'est plus inobservable. Ce problème de l'état fondamental oblige par conséquent à renoncer à la pure simplicté du programme originel et à modifier le lagrangien (3) [78], une refonte d'autant plus nécessaire qu'il ne peut à lui seul, autre point faible, rendre compte de l'existence de fermions.

Or il se trouve que les théories de supergravité [12 - 13], souvent formulées dans des espaces-temps de dimension supérieure à quatre, incluent naturellement des lagrangiens matériels unifiant graviton, fermions et bosons de jauge, qui s'additionnent à (3):

$$L = \alpha_0 + \alpha_1 R + L_m. \tag{4}$$

La supergravité $N = 1$ en 11 dimensions par exemple [13 - 16], longtemps la favorite des physiciens unificateurs, contient une 4-forme F_{ABCD} qui peut avoir une valeur non nulle, $F_{\alpha\beta\gamma\delta} = f\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ où $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le tenseur complètement anti--symétrique de Lévi-Civita et f une constante, qui soit compatible avec la géométrie $M_4 \times V_{D-4}$ imposée, tout simplement parce que quatre est à la fois la dimension de la forme et de l'espace-temps extérieur [79]. La classe d'états fondamentaux ainsi définie (un vide physique non seulement courbé mais contenant de la matière puisque F est non nulle) est solution des équations de champs à condition que la constante cosmologique nue α_0 soit non nulle; V_{D-4} est alors un espace d'Einstein Ricci-positif ($R_{ab} = \lambda^2 g_{ab}$) dont la richesse structurale permet d'engendrer des groupes de jauge variés. Malheureusement la non-nullité de la constante cosmologique nue détruit la supersymétrie et donc la raison d'être de la théorie, et rend de plus tous les états fondamentaux connus instables envers les fluctuations de la métrique et des champs de matière [80 - 81, 16]. Quant aux autres ansätze proposés pour F_{ABCD} [82] ils ne résolvent pas mieux semble-t-il [83] ce problème de l'état fondamental. Pour que α_0 puisse être nul M_4 doit en fait être remplacé par un espace-temps anti de Sitter mais la constante cosmologique effective qui y est alors induite est beaucoup trop grande, comme dans le cas sans matière précédent (3), et les processus invoqués pour l'annuler, que ce soit l'effet de condensation de fermions [84] ou de gravité quantique [85], paraissent artificiels, voire tenir du voeu pieux.

Un autre théorie de supergravité prometteuse, $N = 1$ en 10 dimensions couplée à un champ de Yang-Mills [86], à laquelle s'apparentent les théories de supercordes à la limite des basses énergies [10 - 11], se heurte à un problème similaire: les champs fermioniques devant s'annuler dans des espaces-temps à symétrie maximale, ne subsistent dans l'état fondamental que les champs bosoniques qui, dans cette théorie, se composent d'un champ scalaire, d'une 3-forme dite de Chapline Manton et d'un tenseur anti-symétrique de second ordre de Yang-Mills. Pour être compatibles avec la symétrie d'un état fondamental de type $M_4 \times V_{D-4}$ tous ces champs doivent en fait s'annuler [8 - 88] et on se retrouve devant la même difficulté qu'en théorie de Kaluza-Klein pure décrite par le lagrangien (3), à savoir que la variété interne doit être Ricci-plate.

Ces quelques exemples montrent à l'évidence que si l'on attribue une réalité physique aux dimensions supplémentaires et donc exige que les états fondamentaux soient compactifiés et solutions des équations de champs, des contraintes extrêmement fortes sont alors imposées aux théories. En fait les obstructions qui viennent d'être mentionnées sont générales et ne sont pas facilement surmontables. Les tentatives en ce sens sont pourtant nombreuses. On peut par exemple considérer des variétés internes plus sophistiquées que les habituels espaces d'Einstein: produits topologiques [89], sphères écrasées de Taub [90 - 91], groupes d'isométries hepta-dimensionnelles [77] etc.; mais encore faut-il que les champs de matière puissent se conformer à ces symétries et que l'état fondamental obtenu soit stable [91]. Une autre voie, complètement différente, consiste à renoncer à l'idée que l'état fondamental est un produit métrique et à décrire l'espace-temps quadri-dimensionnel comme une «membrane» de l'espace-temps multidimensionnel [92 - 97]. Mentionnons enfin une troisième possibilité: l'adjonction aux théories d'un nouvel ingrédient, les corrections quadratiques au lagrangien d'Einstein-Hilbert, dont il sera question plus bas.

3. La question de la compactification dynamique

Que l'état fondamental dans lequel les champs se stabilisent soit l'espace-temps de Minkowski n'appelle pas, en théorie quadri-dimensionnelle habituelle, de justification particulière. Il n'en est plus de même en théorie multi-dimensionnelle où l'état fondamental, compactifié, n'est plus a priori plat. Non seulement il doit être solution des équations de champs de la théorie, un problème non trivial comme on vient de le voir, mais son choix devrait être dicté par la théorie elle-même. Il faudrait donc qu'il apparaisse comme l'aboutissement naturel d'un scénario d'évolution cosmique [98 - 99]. Remplir un tel programme, en enlevant une part de l'arbitraire des théories, satisferait à de naturelles exigences d'esthétisme tout en permettant éventuellement, plus prosaïquement, de contourner la question de l'état fondamental qui, dans une telle perspective cosmologique, ne serait plus statique [100 - 101].

Il n'est pas question ici de faire une revue exhaustive de tous les modèles proposés visant à cette fin et je me contenterai de distinguer, dans l'efflorescente littérature sur le sujet, trois grandes lignes de recherche [15].

La première se préoccupe des étapes ultimes de l'évolution [102 - 109]. On y suppose que, dans une phase antérieure que l'on ne se soucie pas de décrire, l'espace-temps a acquis la topologie $\mathbb{R} \times V_3 \times V_{D-4}$. La variété externe V_3 est en général prise à symétrie maximale (mais des espaces de Bianchi ont aussi été envisagés [110 - 111]); quant à la variété interne V_{D-4} on la choisit espace d'Einstein, Ricci-positif. L'évolution temporelle des facteurs d'échelle de ces deux variétés est régie par les équations d'Einstein D-dimensionnelles et dépend de la matière présente, matière que l'on décrit phénoménologiquement par un tenseur énergie-impulsion scindé en deux composantes. La première, standard, décrit le fluide cosmologique à l'origine de l'expansion (mais le choix de l'équation d'état pour le fluide interne est toujours, pour cause d'ignorance, artificielle). La seconde, de «fond», provient des champs de la théorie unitaire sous-jacente à l'étude; son rôle est de réaliser la compactification c.à.d. de garantir que l'état asymptotique désiré, à savoir un espace-temps produit d'une variété interne statique et d'un univers quadri-dimensionnel de Friedman, soit solution des équations de champs (c'en est ainsi un point fixe). La décor étant ainsi plantè, la question est alors de savoir si cette solution est stable envers les perturbations des facteurs d'échelle des variétés interne et externe, c.à.d. de décider si l'univers quadri-dimensionnel de Friedman est un attracteur du modèle considéré. La réponse [102 - 111] dépend des propriétées du tenseur énergie-impulsion de fond et fournit un critère d'evalution de la théorie unitaire dont ce tenseur est issu. Mais pour lui donner du poids il faudrait pouvoir montrer qu'elle ne dépend pas crucialement des détails du modèle. . . .

Dans le cadre de cette approche il faut toujours, pour que les modèles puissent approcher l'état asymptotique souhaité, procéder à des ajustages extrêmement fins des paramètres, et cela à cause de l'énorme disparité d'échelle qui caractérise la configuration finale. Afin d'affronter plus directement ce problème de la constante cosmologique, une seconde ligne de recherche cherche à expliquer comment, en partant d'un produit topologique de deux espaces de «même taille», on peut aboutir à des échelles les caractérisant si disproportionnées, celles de Planck et de Hubble, que la physique de l'univers actuel semble imposer [112 - 120]. La problèmatique ici est d'obtenir naturellement (c'est-à-dire sans ajustage fin de paramètres) des modèles dont l'espace extérieur passe de l'échelle de Planck à celle de Hubble, par voie d'inflation tant qu'à faire, sans que la variété interne en fasse autant. Mais si un fluide cosmologique standard à lui seul peut conduire à une différentiation des échelles, il ne peut produire une phase d'expansion de Sitter de l'univers extérieur. Il faut pour cela la présence, dans les équations de champs, d'une constante cosmologique effective qui ne peut être engendrée que par la composante de «fond» du tenseur énergie-impulsion, c.à.d. par les champs de la théorie unitaire considérée. On retombe alors sur les difficultés, mentionnées plus haut, inhérentes aux modèles inflatoires quadri-dimensionnels.

Un dernière ligne de recherche s'attaque au problème de la séparation des topologies ou, moins ambitieusement car la topologie est une propriété invariante des espaces-temps classiques et causaux [121 - 122], de celui de l'émergence, au tout début de l'evolution cosmique, de trois directions spatiales privilégiées. Une approche possible est de supposer que l'espace est un n-tore ($\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \ldots \times \mathbb{R}$) et d'étudier l'évolution des n facteurs d'échelle au voisinage de la singularité. Si aucun résultat probant sur une nécessaire tridimensionalité n'a encore été obtenu, il a pu en revanche être montré que la succession indéfinie et chaotique d'époques de Kasner qui caractérise l'univers mixmaster à quatre dimensions est remplacée, lorsque la dimension de l'espace-temps est supérieure ou égale à 10, par une approche monotone et non chaotique de la singularité [123 - 130]. Il semblerait donc que la solution générale au sens de Belinski, Lifschitz et Khalatnikov [131] des équations de champs dépend crucialement de la dimension de l'espace-temps.

IV. DES CORRECTIONS AU LAGRANGIEN D'EINSTEIN-HILBERT

Les premiers à suggérer l'adjonction de termes quadratiques dans les invariants de courbure au lagrangien d'Einstein-Hilbert furent Weyl [18 - 132], dans le but de construire une théorie unifiée de la gravitation et de l'électromagnétisme, et Eddington [19], qui arguait en phénoménologue que puisque la métrique de Schwarzschild, qui était alors le seul pont entre la théorie d'Einstein et l'expérience, était aussi solution des équations de champ déduites de ces lagrangiens quadratiques, ils devaient être étudiés au même titre que celui d'Einstein-Hilbert. Mais c'est le souci unitaire de Weyl qui prédomina ensuite, motivant l'introduction récurrente de ces corrections dans les tentatives de quantification de la gravitation, dans le but surtout d'éliminer les divergences de ces théories [8, 9, 64, 133 - 135]. Aujourd'hui les théories de supercordes [10 - 11] peuvent en principe dicter ces corrections qui, dans leur cadre, apparaissent à la limite des basses énergies. Mais ce passage à la limite n'est pas chose aisée, le dimension même de l'espace-temps par exemple – 4? 10? 26? 506?! – ayant été l'objet de débats [16]. Si donc chacun s'accorde à admettre l'existence de ces corrections, leur forme est encore incertaine et la liste de références citées [136 - 155] n'est pas exhaustive.

Le seul point sur lequel j'insisterai ici c'est que, nécessairement en quatre dimensions et sauf exeption en plus de quatre dimensions [18, 19, 131, 156 - 158], les équations de champ déduites de ces lagrangiens sont d'ordre supérieur au second dans les dérivées de la métrique. La structure même de la théorie d'Einstein est ainsi modifiée puisqu'une perturbation qui augmente l'ordre de différentiation d'une équation introduit de nouvelles familles de solutions qui ne sont pas nécessairement proches des solutions non perturbées [159 - 161]. Et c'est cette caractéristique qui est en fin de compte à l'origine à la fois des attraits et des tares de ces théories quadratiques.

C'est en effet parce qu'elles sont du quatrième ordre que les équations de champ déduites des lagrangiens purement quadratiques (c.à.d. n'incluant pas le terme linéaire d'Einstein-Hilbert) faillissent à décrire le champ à l'extérieur d'une masse, car la métrique de Schwarzschild, pourtant solution de ces équations et la seule asymptotiquement plate, ne peut être raccordée à une solution intérieure décrivant une distribution d'énergie définie-positive [162 - 164]. C'est pour la même raison qu'on peut trouver, lorsque le terme linéaire d'Einstein-Hilbert est cette fois inclus, une solution à symétrie sphérique des équations de champ tendant asymptotiquement vers le potentiel de Newton, mais corrigée par un terme de Yukawa dont le coefficient dépend de l'équation d'état de la source: ces théories ne satisfont donc pas au théorème de Birkhoff [163 - 165], ce qui les prive des avantages du «principe d'effacement» [71]. C'est pour la même raison encore que le nombre de degrés de liberté du champ gravitationnel n'est pas le même qu'en théorie d'Einstein: en plus du graviton, ces théories en effet compte un champ scalaire massif et un champ massif de spin deux, qui sert à renormaliser la théorie [135], mais dont l'énergie est alors négative, ce qui rend le vide instable envers la création de particules et permet une propagation des ondes a-causale car hors du cône de lumière [165 - 166]. Pour la même raison toujours, la solution du problème de Cauchy, bien qu'elle s'obtienne génériquement comme en théorie d'Einstein [167 - 168], passe dans certains cas par l'identification de la théorie avec une théorie scalaire-tensorielle du second ordre [168 - 169]. Et pour la même raison enfin, variations des lagrangiens par rapport à la métrique ou à la Palatini ne conduisent pas, contrairement à ce qui se passe en théorie d'Einstein, à des équations de champs identiques [170 - 172].

En cosmologie ce changement d'ordre des équations de champs est à l'orgine de nombre de problèmes d'instabilité, instabilités a priori gênantes puisqu'on peut montrer par exemple [173] que les modèles homogènes et isotropes à facteur d'échelle jamais nul, permis par la présence des termes quadratiques [174 - 177], ne tendent pas, en général, vers le scénario standard; pire, ils développent des singularités de courbure. Mais, de nécessité faisant vertu, on peut tirer parti de ces mêmes instabilités pour construire des modèles inflatoires: dans un espace homogène et isotrope en effet, les théories quadratiques se réduisent à une théorie scalaire-tensorielle du second ordre dont le champ scalaire peut produire une période d'inflation [178 - 182]. Et si un raccordement avec le scénario standard est possible c'est parce que ou bien la correction au lagrangien, en $R^2 \operatorname{Log} R$ par exemple [178 - 180, 183 - 184], n'est pas quadratique et peut changer de signe au cours de l'évolution, ou bien parce que des phénomènes physiques ayant le même effet sont pris en compte, comme par exemple la rétroaction sur l'évolution du facteur d'échelle de la création de particules en fin de période inflatoire [181]. Mentionnons enfin quelques études de modèles cosmologiques anisotropes déduits de ces théories quadratiques [183 - 189].

Que ce soit en cosmologie ou en gravitation quantique on voit donc que les écueils mais aussi la richesse des théories basées sur des lagrangiens non linéaires dans les invariants de courbure reposent sur l'existence de solutions des équations de champ qui deviennent singulières dans la limite où ces lagrangiens approchent celui d'Einstein-Hilbert, et dont l'étude entre dans le cadre de la théorie des perturbations singulières [159 - 161, 173]. Si on impose en revanche que leurs solutions soient analytiques dans le couplage aux dérivées d'ordre supérieur [190], il faut alors procéder à leur réduction d'ordre, c.à.d. leur associer un système d'équations différentielles du second ordre dont les solutions soient les solutions analytiques cherchées, système qui peut d'ailleurs varier selon les plages considérées des valeurs des constantes de couplage [161, 191 - 192].

V. LE LAGRANGIEN DE LOVELOCK

1. Définition et propriétés

Peu après la naissance de la relativité générale, Vermeil [193] puis Weyl [18] et Cartan [194] ont montré qu'elle était unique dans le sens que le seul tenseur dépendant de la métrique, de ses dérivées premières et secondes, qui soit symétrique, conservé, et linéaire dans les dérivées secondes de la métrique était, en toutes dimensions, le tenseur d'Einstein avec constante cosmologique nue. En 1971 Lovelock [195 - 196] a relaxé la condition de dépendance linéaire dans les dérivées secondes et montré que le tenseur alors obtenu pouvait s'écrire comme la variation d'Euler d'un lagrangien:

$$L = \alpha_0 + \alpha_1 R + \alpha_2 (R_{ijkl}R^{ijkl} - 4R_{ij}R^{ij} + R^2) + \dots + \alpha_p L_{(p)} + \dots + \alpha_{[D/2]} L_{[D/2]} \tag{5}$$

où D est la dimension de l'espace-temps, $[D/2]$ la partie entière de $D/2$, où les α_p sont des constantes numériques et où $L_{(p)}$, terme de degré p dans le tenseur de Riemann, est le générateur de la classe d'Euler en dimension $2p$ [197, 141]. (Alternativement, (5) peut être écrit comme une divergence totale dans un espace-temps à $(D + 1)$ dimensions, espace dans lequel il est le lagrangien naturel d'une théorie de jauge $O(D + 1)$ [198 - 199]). Les deux premiers termes, $L_{(0)}$ et $L_{(1)}$, ne sont autres que la constante cosmologique nue et le lagrangien d'Einstein-Hilbert. Le terme quadratique a été quant à lui considéré par Lanczos dès les années trente [156] et récemment mis sous les feux de la rampe par les théoriciens des supercordes [141, 200 - 201]. Lorsque la variété a quatre dimensions il se réduit à une divergence totale, car il en engendre la classe d'Euler, et sa variation est identiquement nulle (c'est l'identité de Bach [202]). Mais il n'en est plus de même en espace-temps de dimension supérieure et sa variation contribue alors aux équations de champs. Le langage des formes rend ces propriétés particulièrement évidentes [197 - 203] et permet également de construire élégamment les lois de conservation associées aux équations de champs [204 - 205].

On voit ainsi les deux principales caractéristiques du lagrangien de Lovelock: en dimension quatre il se réduit à celui d'Einstein-Hilbert avec constante cosmologique nue; en dimension supérieure à quatre il est le seul à engendrer des équations de champs du second ordre. Ainsi sont évités les problèmes d'instabilité, liés à l'ordre supérieur des équations de champs, qui entachent les théories non linéaires génériques [162 - 173]. La théorie de Lovelock par exemple satisfait au théorème de Birkhoff [206 - 207] et le nombre de degrés de liberté du champ gravitationnel y est le même qu'en théorie d'Einstein ce qui évite l'apparition de fantômes et de tachyons [141].

Ceci étant, ces équations de champs de Lovelock, qui apparaissent donc comme la généralisation la plus naturelle de celles d'Einstein en dimension supérieure à quatre, en diffèrent néanmoins sous un aspect majeur: elles ne sont pas linéaires dans les dérivées secondes de la métrique. Cela rend la résolution du problème da Cauchy moins évidente [208 - 209] (on peut en fait fabriquer des solutions pathologiques de ce point de vue [210 - 211]); pour la même raison la construction du formalisme hamiltonien peut buter sur des difficultés [212]; enfin l'étude de la théorie linéarisée est de ce fait compliquée ainsi que celle de la propagation des ondes et de la stabilité de la théorie [213, 206].

2. Le lagrangien de Lovelock et la question de l'état fondamental

La question est ici de savoir à quelles conditions un état fondamental, produit topologique de l'espace-temps de Minkowski M_4 et d'une variété euclidienne compacte V_{D-4}, peut être solution des équations de champs déduites d'un lagrangien dont la partie gravitationnelle n'est plus simplement celle d'Einstein-Hilbert (3) mais celle de Lovelock (5).

Sans qu'il soit besoin d'entrer dans le détail des équations on conçoit que, même en l'absence de matière, c'est-à-dire lorsque le lagrangien se réduit à sa partie gravitationnelle, de Lovelock, (5), il soit possible de choisir les coefficients α_p des différents générateurs des classes d'Euler de sorte que l'état fondamental soit le produit de M_4 et de variétés internes variées (des modèles où V_{D-4} est à symétrie sphérique [197, 214 - 220] ou $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [221] ou $SO(3) \times \times SO(3)$ [222] ont été construits explicitement); et cela parce que les termes non-linéaires du lagrangien de Lovelock peuvent être ajustés de façon à annuler la constante cosmologique effective a priori induite dans l'espace-temps extérieur par la courbure de la variété interne. Si donc la théorie de Lovelock (5) ne permet pas mieux que celle de Kaluza-Klein (3) de résoudre le problème de la constante cosmologique, puisqu'un ajustage fin des paramètres α_p est toujours nécessaire, elle perme en revanche de construire des états fondamentaux dont la variété interne n'est plus nécessairement Ricci-plate. En cela les corrections d'ordre supérieur jouent le même rôle que la matière des théories basées sur le lagrangien (4).

Ceci dit cette propriété n'est pas particulière au lagrangien de Lovelock: toute correction non-linéaire dans les invariants de courbure au lagrangien d'Einstein-Hilbert y conduit [223]. Mais l'état fondamental, du moins lorsque V_{D-4} est une sphère, est, en théorie de Lovelock, stable envers les perturbations de l'échelle de la sphère interne (à condition cependant que les corrections ne se limitent pas au terme quadratique de Lanczos mais incluent aussi des termes d'ordre supérieur, cubique au moins [217, 219]). Ce n'est pas le cas en théorie non-linéaire générique [223] où les équations de champs ne sont plus du second ordre et donnent lieu à des perturbations singulières [173]. En revanche la stabilité de l'état fondamental envers les perturbations hors-diagonale de la métrique ($g_{\alpha a}$) [224 - 225], c.à.d. le signe du terme cinétique des champs de jauge [$\approx (\partial g_{\alpha a})^2$] ne sont pas garantis comme en théorie de Kaluza-Klein (3), ce qui impose des conditions supplémentaires aux coefficients α_p [226 - 227].

Pour illustrer maintenant le rôle que peut jouer l'adjonction de matière au lagrangien de Lovelock, considérons une théorie, que l'on prendra déca-dimensionnelle, où la matière est décrite par un champ de Yang-Mills $F_{\alpha\beta}{}^a$ où a prend ses valeurs dans un certain groupe de jauge. La supergravité $N = 1$ en 10 dimensions par exemple, sur laquelle se construisent les limites de basse énergie des théories de supercordes [86, 10 - 11], est une théorie incluant un tel champ. La théorie étant déca-dimensionnelle, le lagrangien de Lovelock est, si l'on ignore le terme de surface qui ne contribue pas aux équations de champs, la somme de cinq termes allant de l'ordre zéro, la constante cosmologique nue α_0, à l'ordre quatre dans la courbure.

Imposons maintenant, et ce choix est aussi motivé par des considérations supercordistes [228], que l'état fondamental soit le produit de M_4 par une variété interne Ricci-plate (on ne cherche donc aucunement à d'écrire les symétries de jauge par des isométries). On montre alors facilement que lorsque la théorie ne contient ni constante cosmologique nue ($\alpha_0 = 0$) ni terme cubique ($\alpha_3 = 0$), l'état fondamental est solution des équations de champs, ou bien à condition que α_2 et F soient tous deux nuls (on retrouve alors le résultat obtenu en théorie de Kaluza-Klein [87 - 88] mentionné plus haut), ou bien, si $\alpha_2 \neq 0$, à condition d'identifier la 2-forme de courbure de la variété interne au champ de Yang-Mills F [228].

Je ne ferai ici que remarquer que la valeur de α_4 n'entre pas dans le raisonnement. La raison en est que le terme quartique, parce qu'il est proportionnel au générateur de la classe d'Euler en dimension huit, n'apparaît pas dans les équations de champs pour l'état fondamental car sa projection sur la variété interne hexa-dimensionnelle est identiquement nulle. Si le terme quartique n'était pas celui de Lovelock il interviendrait explicitement dans les équations de champs pour l'état fondamental et la variété interne ne pourrait plus être Ricci-plate, pour aucun choix du champ de Yang-Mills. C'est là probablement la façon la plus simple de montrer que les états fondamentaux à variétés internes Ricci-plates (de Calabi-Yau par exemple [228]) ne peuvent pas être solutions des équations de champs des théories de basse énergie des supercordes dans la mesure où le terme quartique qu'elles contiennent n'est pas celui de Lovelock [142 - 155].

3. Le lagrangien de Lovelock et la question de la compactification dynamique

En théorie de Lovelock plutôt que de Kaluza-Klein, il est a priori plus aisé de construire des modèles cosmologiques, produits topologiques d'un espace-temps extérieur tendant asymptotiquement vers le scénario standard et d'une variété interne dont le facteur d'échelle tend vers une valeur constante, puisque l'on peut jouer sur les coefficients des corrections d'ordre supérieur.

Imposons par exemple à l'espace-temps extérieur d'être homogène et isotrope, à la variété interne d'être une sphère, et remplaçons phénoménologiquement les composantes hors-diagonale de la metrique (qui, dans une version unifiée décrivent les bosons de jauge) par un tenseur énergie-impulsion de fluide parfait. Partant d'une configuration initiale où le facteur d'échelle de l'univers extérieur est déjà bien plus grand que celui de la sphère interne, on montre alors que pour un choix approprié des coefficients du lagrangien la variété interne continue à se contracter pour tendre vers une variété statique pendant que l'univers extérieur tend vers la solution de Friedman standard correspondant à l'équation d'état choisie [217, 219, 229]. Une autre façon de présenter ce résultat est de dire que la constante cosmologique effective induite dans l'univers extérieur par la courbure de la variété interne s'évanouit asymptotiquement. Le point à noter ici est qu'il se trouve qu'elle approche zéro en $1/t^2$ où t est le temps cosmique, au lieu de $1/t$, ce à quoi on s'attendrait, et vaut ainsi $\approx 10^{-120}$ en unités de Planck à l'époque actuelle ce qui est compatible avec l'observation.

Dans le contexte de l'étude des limites de basse énergie des théories de supercordes, des modèles décadimensionnels, où la variété interne est Ricci-plate et où un champ de Yang-Mills de supergravité compense les effets gravitationnels des corrections quadratiques, on été explicitement construits [230 - 236] et montrés tendre vers le scénario standard, à condition que la correction quadratique soit celle de Lanczos [230 - 231].

Pour ce qui est du problème de la séparation des échelles en théorie de Lovelock, à savoir comment construire des modèles qui, naturellement, par voie d'inflation par exemple, conduisent à des échelles caractérisant les espaces interne et externe si disproportionnées, les études sont encore incomplètes et se sont sauf exeption [241 - 242] confinées au cadre, inspiré par l'état de la théorie des supercordes en 1986, de la théorie de supergravité $N = 1$ en 10 dimensions corrigée par l'addition du lagrangien de Lanczos [237 - 240]. Ce qui est certain c'est que, les équations de champs étant du second ordre, l'inflation ne peut tirer son origine de l'existence de perturbations singulières comme lorsque les corrections sont génériques [243].

En ce qui concerne enfin la possibilité de construire des modèles qui évitent l'apparition de singularités sans violer la condition forte sur l'energie (mais qui, parce qu'ils sont basés sur le lagrangien de Lovelock, violent une autre hypothèse des théorèmes de Penrose et Hawking, à savoir que la gravitation est décrite par les équations d'Einstein), je ne ferai que mentionner un modèle [220] qui est une généralisation du modèle statique d'Einstein mais qui, contrairement à ce dernier, est stable envers les perturbations linéaires des facteurs d'échelle des espaces externe et interne. Une telle solution pourrait servir de point de départ à la construction d'un modèle dont l'espace-temps extérieur présenterait périodiquement des phases d'expanssion compatibles avec le scénario standard, sans jamais rencontrer de singularité de courbure, et cela sans introduire de matière non-standard violant la condition forte sur l'énergie. Une élaboration détaillée d'un tel modèle requiert l'emploi de méthodes numériques d'intégration et est actuellement à l'étude [244].

REMERCIEMENTS

J'ai bénéficié au corus de la rédaction de cet article de nombreuses et clarifiantes discussions avec John Madore. Je l'en remercie vivement.

REFERENCES

[1] *Unity of Forces in Nature*, A. Zee edt, World Scientific, Singapore, 1982.
[2] *Gravitation and Cosmology*, S. Weinberg, John Wiley & Sons, New-York, 1972.
[3] *The Large Scale Structure of Spacetime*, S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
[4] *The Very Early Universe*, G.W. Gibbons, S.W. Hawking, S.T.C. Siklos edts, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
[5] *Fundamental Physics and Cosmology*, J. Audouze, J. Tran Thanh Van edts, Edition Frontières, Gif-sur-Yvette, 1985.
[6] *Inflationary Cosmology*, L.F. Abbott, So-Young Pi edts, World Scientific, Singapore, 1986.
[7] *Origin and Early History of the Universe*, Proceedings of the 26th Liège Colloquium, July 1986, Université de Liège, 1987.
[8] *Quantum Theory of Gravity: Essays in Honour of the 60th Birthday of Bryce S. DeWitt*, S.M. Christensen edt, Adam Hilger, Bristol, 1984.
[9] *Quantum Structure of Space and Time*, M.J. Duff, C.I. Isham edts, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
[10] *Superstrings*, J.H. Schwarz edt, World Scientific, Singapore, 1985.
[11] *Superstring Theory*, M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
[12] *Introduction to Supersymmetry*, P.G.O. Freund, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
[13] *Supersymmetry and Supergravity '84*, B. DeWit, P. Fayet, P. van Nieuwenhuizen edts, World Scientific, Singapore, 1984.
[14] *An Introduction to Kaluza-Klein Theories*, H.C. Lee edt, World Scientific, Singapore, 1984.
[15] *Kaluza-Klein Theories*, D. Bailin, A. Love, University of Sussex preprint, 1986.

[16] *Kaluza-Klein Supergravity*, M.J. Duff, B.E.W. Nilsson, C.N. Pope, Phys. Reports 130 (1986) 1 - 142.
[17] A. EINSTEIN, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitäts theorie* Sitz. Preuss. Akad. Wiss. (1917) 142 - 152.
[18] *Raum, Zeit, Materie*, H. Weyl, 4th ed, Springer-Verlag, Berlin, 1921.
[19] *The Mathematical Theory of Relativity*, A. Eddington, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1924.
[20] T. KALUZA, *Zum Unitäts problem der Physik* Sitz. Preuss. Akad. Wiss., Kl (1921) 966.
[21] O. KLEIN, *Quanten theorie und fünfdimensionale Relativitäts theorie* Z. Phys. 37 (1926) 895.
[22] F. HOYLE, *A new model for the expanding universe* MNRAS 108 (1948) 372 - 382 et *On the cosmological problem* 109 (1949) 365 - 371.
[23] H. BONDI, T. GOLD, *The steady state theory of the expanding universe* MNRAS 108 (1948) 252 - 270.
[24] Y. HOSOTANI, *Scalar field theories in curved space*, Phys. Rev. D32 (1985) 1949 - 1953.
[25] M.S. MADSEN, *Scalar Fields in Curved Spacetimes*, University of Sussex preprint, 1987.
[26] A.D. DOLGOV, *An attempt to get rid of the cosmological constant* in *The Very Early Universe*, (ref. [4]) p. 449 - 458.
[27] L.H. FORD, *Cosmological-constant damping by unstable scalar fields*, Phys. Rev. D35 (1987) 2339 - 2344.
[28] J.D. BARROW, *Relativistic cosmology*, Vancouver School Lectures', in *The Early Universe*, W. Unruh and G.W. Semenoff edts, Reidel, New-York, 1987.
[29] J.A. STEIN-SCHABES, *Inflation in spherically symmetric inhomogeneous models*, Phys. Rev. D35 (1987) 2345 - 2351.
[30] *Quantum Fields in Curved Space*, N.D. Birrell, P.C.W. Davies, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
[31] P. SPINDEL, *Back Reaction of a Scalar Quantum Field in Curved Space: an Exact Solution of the Semi-Classical Field Equations*, Université de Mons preprint, 1987.
[32] G.F.R. ELLIS, *Existence (or avoidance) and Nature of the classical singularity*, p. 319 - 336 in *Origin and Early History of the Universe*, (ref. [7]).
[33] A.A. STAROBINSKI, Pis'ma Astron. Zh. 4 (1978) 155 [Sov. Astron. Lett. 4 (1978) 82].
[34] J.D. BARROW, R.A. MATZNER, *Size of a bouncing mixmaster universe*, Phys. Rev. D21 (1980) 336 - 340.
[35] F.J. TIPLER, *Energy conditions and Spacetime Singularity*, Phys. Rev. D17 (1978) 2521 - 2528.
[36] A.S. EDDINGTON, *On the instability of Einstein's spherical world*, MNRAS 90 (1930) 668 - 678.
[37] V.A. BELINSKI, I.M. KHALATNIKOV, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 72 (1977) 3 [Sov. Phys. JETP 45 (1977) 1].
[38] A.H. GUTH, *Inflationary universe: a possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D23 (1981) 347 - 356.
[39] J.D. BARROW, Erice School Lectures, in *Astroparticle Physics*, A. de Rujula edt, World Scientific, Singapore (1987).
[40] R. WALD, *Asymptotic behaviour of homogeneous cosmological models in the presence of a positive cosmological constant*, Phys. Rev. D28 (1983) 2118.
[41] A.D. LINDE, *Initial conditions for inflation*, Phys. Lett. 162B (1985) 281.
[42] V.A. BELINSKI et al., Sov. Phys. JETP 62 (1985) 195.
[43] V.A. BELINSKI, L.P. GRISHCHUK, I.M. KHALATNIKOV, YA.B. ZELDOVICH, *Inflationary stages in cosmological models with a scalar field*, Phys. Lett 155B (1985) 232.
[44] M.S. MADSEN, P. COLES, *Chaotic Inflation*, University of Sussex preprint, 1987.

[45] J.D. BARROW, *The Premature Recollapse Problem in Closed Inflationary Universes*, University of Sussex preprint, 1987.
[46] E.R. HARRISON, *Fluctuations at the threshold of classical cosmology*, Phys. Rev. D1 (1970) 2726 - 2730.
[47] Ya.B. ZELDOVICH, MNRAS 160 (1972) 1P.
[48] S.W. HAWKING, *The development of irregularities in a single bubble inflationary universe*, Phys. Lett. 115B (1982) 295.
[49] A.A. STAROBINSKI, *Dynamics of phase transition in the new inflationary universe scenario and generation of perturbations*, Phys. Lett. 117B (1982) 175.
[50] A.H. GUTH, SO-YOUNG PI, *Fluctuations in the new inflationary universe*, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1110.
[51] J.M. BARDEEN, P.J. STEINHARDT, M.S. TURNER, *Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe*, Phys. Rev. D28 (1983) 679 - 693.
[52] P.J. STEINHARDT, M.S. TURNER, *Prescription for successful new inflation*, Phys. Rev. D29 (1984) 2162 - 2171.
[53] Q. SHAFI, A. VILENKIN, *Inflation with SU(5)*, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 691 - 694.
[54] M. TURNER, *Cosmology and particle physics*, Vancouver School Lectures, in *The Early Universe*, W. Unruh and G.W. Semenoff edts, Reidel, New-York (1987).
[55] A.B. LAHANAS, D.V. NANOPOULOS, *No-Scale Supergravity*, Phys. Reports 145 (1987) 1.
[56] E. WITTEN, *Dimensional reduction of supersting models*, Phys. Lett. 155B (1985) 151 - 155.
[57] I. ANTONIADIS, G.F.R. ELLIS, J. ELLIS, C. KOUNNAS, D.V. NANOPOULOS, *On the possibility of avoiding singularities by dilaton emission*, Phys. Lett. 191B (1987) 393.
[58] S. DESER, *Improvement versus stability in gravity-scalar coupling*, Phys. Lett. 134B (1984) 419 - 421.
[59] J.D. BARROW, N. DERUELLE, *The Confrontation of No-Scale Supergravity with Cosmology*, Nucl. Phys. B, à paraître.
[60] *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme*, A. Lichnérowicz, Masson, Paris, 1955.
[61] P. JORDAN, *Erweiterung der projektiven Relativitäts theorie*, Ann. Phys. Leipzig 18 (1947) 219 - 228.
[62] Y. THIRY, p. 216 - 218: *Les équations de la théorie unitaire de Kaluza*, p. 1881 - 1882: *Sur la régularité des champs gravitationnel et électromagnétique dans les théories unitaires*, C.R. Acad. Sci. Paris 226 (1948) 216 & 1881.
[63] A. EINSTEIN, P. BERGMANN, *On a generalization of Kaluza's theory of electricity*, Ann. Math. 39 (1938) 683 - 715.
[64] B.S. DE WITT, *Dynamical theory of groups and fields*, p. 587 - 822, 1963 Les Houches Lectures, in *Relativity, Groups and Topology*, B.S. DeWitt & C. DeWitt edts, Gordon and Breach, New-York, 1964.
[65] R. KERNER, *Generalization of the Kaluza-Klein theory for an arbitrary non-abelian gauge group*, Ann. Inst. H. Poincaré 9 (1968) 143 - 152.
[66] E. CREMMER, B. JULIA, *The SO(8) supergravity*, Nucl. Phys. B159 (1979) 141.
[67] A. SALAM, J. STRATHDEE, *On Kaluza-Klein theory*, Ann. Phys. 141 (1982) 316 - 352.
[68] E. KANT, *Thoughts on the True Estimation of Living Forces* in J. Handyside, *Kant's Inaugural Dissertation and Early Writings on Space*, University of Chicago Press, Chicago, 1929; cité in [70].
[69] *Concepts of Space - The History of Theories of Space in Physics*, M. Jammer, Harvard University Press, 1954.

[70] *The Anthropic Cosmological Principle*, J.D. Barrow, F.J. Tipler, Clarendon Press, Oxford, 1986.

[71] T. DAMOUR, *Gravitational radiation and the motion of compact badies*, p. 59 - 144, 1982 Les Houches Lectures, in *Gravitational Radiation*, N. Deruelle, T. Piran edts, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[72] F.R. TANGHERLINI, *Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem*, Nuovo Cim. 27 (1963) 636 - 651.

[73] F. CARUSO, R. MOREIRA-XAVIER, *On the Physical Problem of Spatial Dimensions: an Alternative Procedure to Stability Arguments*, Torino Univ. preprint IFTT - 85/16.

[74] M. YOSHIMURA, *Very Early Universe*, KEK preprint 86 - 105, to be published in the Proceedings of the Nishiyomiya Symposium in Theoretical Physics.

[75] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 776 - 797.

[76] *Integral Formulas in Differential Geometry*, K. Yano, Marcel Dekker, New-York, 1970.

[77] M. DEMIANSKI et al., *The Group-Theoretical Classification of the 11 Dimensional Classical Homogeneous Kaluza-Klein Cosmologies*, Jagellonian Univ. preprint, 1986.

[78] E. CREMMER, Z. HOVATH, L. PALLA, J. SCHERK, Nucl. Phys. B127 (1971) 57.

[79] P.G.O. FREUND, M.A. RUBIN, *Dynamics of dimensional reduction*, Phys. Lett. 97B (1980) 233.

[80] S. RANDJBAR-DAEMI, A. SALAM, J. STRATHDEE, *Instability of higher dimensional Yang-Mills systems*, Phys. Lett. 124B (1983) 345.

[81] M.J. DUFF, B.E.W. NILSSON, C.N. POPE, *The criterion for vacuum stability in Kaluza-Klein supergravity*, Phys. Lett. 139B (1984) 154.

[82] F. ENGLERT, *Spontaneous compactification in 11-dimensional supergravity*, Phys. Lett. 119B (1982) 339 - 342.

[83] B. BIRAN, P. SPINDEL, *Instability of the parallelized seven-sphere: an eleven dimensional approach*, Phys. Lett. 141B (1984) 181.

[84] M.J. DUFF, C.A. ORZALESI, *The cosmological constant in spontaneously compactified $D = 11$ supergravity*, Phys. Lett. 122B (1983) 37.

[85] S.W. HAWKING, *Spacetime foam*, Nucl. Phys. B144 (1978) 349.

[86] G.T. CHAPLINE, N.S. MANTON, *Unification of Yang-Hills theory and supergravity in 10 dimensions*, Phys. Lett. 120B (1983) 105.

[87] S. RANDJBAR-DAEMI, A. SALAM, J. STRATHDEE, *Compactification of supergravity plus Yang-Mills in ten dimensions*, Phys. Lett. 124B (1983) 349.

[88] D.Z. FREEDMAN, G.W. GIBBONS, P.C. WEST, *Ten into four won't go*, Phys. Lett. 124B (1983) 491.

[89] R. KERNER, *Geometrical background for the unified field theories: the Einstein-Cartan theory over a principal fibre bundle*, Ann. Inst. H. Poincaré 34 (1981) 437 - 464.

[90] J. OKADA, *Symmetry breakings in the Kaluza-Klein theory*, Class. Quant. Grav., 3 (1986) 221 - 232.

[91] T.C. SHEN, J. SOBCZYK, *Higher Dimensional Self-Consistent Solutions with Deformed Internal Spheres*, Phys. Rev. D36 (1987) 397.

[92] V.A. RUBAKOV, M.E. SHAPOSHNIKOV, *Extra space-time dimensions: towards a solution to the Cosmological constant problem*, Phys. Lett. 125B (1983) 139.

[93] C. WETTERICH, *The cosmological constant and non compact internal spaces in Kaluza-Klein theories*, Nucl. Phys. B255 (1985) 480 - 494.

[94] E.J. SQUIRES, *Dimensional reduction caused by a cosmological constant*, Phys. Lett. 167B (1986) 286 - 288.

[95] G.W. GIBBONS, *Quantized flux tubes in Einstein-Maxwell theory and non-compact internal spaces*, in *Fields and Geometry*, Proceedings of the 22nd Karpacz School of

Theoretical Physics, A. Jadezyk edt, World Scientific, Singapore, 1986.

[96] G.W. GIBBONS, D.L. WILTSHIRE, *Spacetime as a Membrane in Higher Dimensions*, DAMTP preprint, Nucl. Phys. B. 287 (1987) 717.

[97] G.W. GIBBONS, *The Dimensionality of Spacetime*, to appear in the Proceedings of the Meudon Conference, H. De Vega, N. Sanchez edts, 1987.

[98] A. CHODOS, S. DETWEILER, *Where has the fifth dimension gone?*, Phys. Rev. D21 (1980) 2167 - 2170.

[99] P.G.O. FREUND, *Kaluza-Klein cosmologies*, Nucl. Phys. B209 (1982) 146.

[100] G. CHAPLINE, G.W. GIBBONS, *Unification of elementary particle physics and cosmology in ten dimensions*, Phys. Lett. 135B (1984) 43.

[101] P.G.O. FREUND, P. OH, *Cosmological solutions with «ten into four» compactification*, Nucl. Phys. B255 (1985) 688.

[102] S. RANDJBAR-DAEMI, A. SALAM, J. STRATHDEE, *On Kaluza-Klein cosmologies*, Phys. Lett. 135B (1984) 388.

[103] D. BAILIN, A. LOVE, C.E. VAYONAKIS, *Kaluza-Klein cosmologies at late times*, Phys. Lett. 142B (1984) 344.

[104] D. BAILIN, A. LOVE, J. STEIN-SCHABES, *Kaluza-Klein cosmological inflation*, Nucl. Phys. B253 (1985) 387.

[105] M. GLEISER, J.G. TAYLOR, *Time variation of coupling constants in Kaluza-Klein cosmologies*, Phys. Rev. D31 (1985) 1904 - 1910.

[106] K. MAEDA, H. NISHINO, *Cosmological solutions in $D = 6$ $N = 2$ Kaluza-Klein supergravity: the Friedmann universe without fine tuning*, Phys. Lett. 154B (1985) 358; *An attractor universe in six dimensional $N = 2$ supergravity Kaluza-Klein theories*, 158B (1985) 381.

[107] J.D. BARROW, J. STEIN-SCHABES, *The stability of some Kaluza-Klein cosmological models*, Phys. Lett. 167B (1986) 173.

[108] K. MAEDA, *Stability and attractor in a higher-dimensional cosmology. I*, Class. Quant. Grav. 3 (1986) 233 - 248.

[109] K. MAEDA, *Is the compactified vacuum semi-classically unstable?*, Phys. Lett. 186B (1987) 33.

[110] D. LORENZ-PETZOLD, *More supergravity cosmologies*, Phys. Lett. 158B (1985) 110 et réf. citées.

[111] J. DEMARET, J.L. HANQUIN, M. HENNEAUX, P. SPINDEL, *Cosmological models in eleven dimensional supergravity*, Nucl. Phys. B252 (1985) 538.

[112] E. ALVAREZ, M. BELEN-GAVELA, *Entropy from extra dimensions*, Phys. Rev. Lett. 51 (1983) 931 - 934.

[113] D. SAHDEV, *Towards a realistic Kaluza-Klein cosmology*, Phys. Lett. 137B (1984) 155; *Perfect fluid higher dimensional cosmologies*, Phys. Rev. D30 (1984) 2495 - 2507.

[114] Y. TOSA, *Spontaneous dimensional reduction in Kaluza-Klein theories*, Phys. Rev. D30 (1984) 339 - 343; *Classical Kaluza-Klein cosmology for torus space with a cosmological constant and matter*, p. 2654 - 2060.

[115] M. YOSHIMURA, *Effective action and cosmological evolution of scale factors in higher-dimensional curved space-time*, Phys. Rev. D30 (1984) 344 - 356.

[116] E.W. KOLB, D. LINDLEY, D. SECKELL, *More dimensions - less entropy*, Phys. Rev. D30 (1984) 1205 - 1213.

[117] R.B. ABBOTT, S.M. BARR, S.D. ELLIS, *Kaluza-Klein cosmologies and inflation*. I Phys. Rev. D30 (1984) 720 - 727; II, D31 (1985) 673 - 680.

[118] Y. OKADA, *Inflation in Kaluza-Klein cosmology*, Phys. Lett. 150B (1985) 103, Q. SHAFI, C. WETTERICH, *Inflation with higher dimensional gravity*; Phys. Lett. 152B (1985) 51.

[119] T. KOIKAWA, K. MAEDA, *Particle creation effect on $M_4 \times S_7$ Kaluza-Klein cosmologies*, Phys. Lett. 149B (1984) 82.

[120] T. KOIKAWA, M. YOSHIMURA, *Observational consequences of dynamical compactification (. . .)*, Phys. Lett. 150B (1985) 107; *quantum vacuum energy and singularity free Kaluza-Klein cosmology*, 155B (1985) 137; *Effect of particle production on the evolution of a low entropy universe*, 241.

[121] R.P. GEROCH, *Topology in General Relativity*, J. Math. Phys. 8 (1967) 782 - 786; *Domain of dependence*, 11 (1970) 437 - 448.

[122] F.J. TIPLER, *Singularities and causality violation*, Ann. Phys. New-York, 108 (1977) 1 - 36; *Topology change in Kaluza-Klein and supersting theories*, Phys. Lett. 165B (1985) 67.

[123] J.D. BARROW, J. STEIN-SCHABES, *Kaluza-Klein mixmaster universes*, Phys. Rev. D32 (1985) 1595 - 1597.

[124] T. FUROSAWA, A. HOSOYA, Prog. Theor. Phys. 73 (1985) 47.

[125] J. DEMARET, M. HENNEAUX, P. SPINDEL, *Non-oscillatory behaviour in vacuum Kaluza-Klein cosmology*, Phys. Lett. 164B (1985) 27.

[126] J. DEMARET, J.L. HANQUIN, M. HENNEAUX, P. SPINDEL, A. TAORMINA, *The fate of the mixmaster behaviour in vacuum inhomogeneous Kaluza-Klein cosmological models*, Phys. Lett. 175B (1986) 129.

[127] A. TOMIMATSU, H. ISHIHARA, *Dimensional reduction in an oscillatory Kaluza-Klein cosmology*, Gen. Rel. Grav. 18 (1986) 161 - 171.

[128] A.B. HENRIQUES, R.G. MOORHOUSE, *Oscillatory Solution in Higher Dimensional Cosmologies*, Univ. of Lisboa preprint, CFMC, E-6/87.

[129] M. SZYDLOWSKI, M. BIESADA, J. SZCZESNY, *Multidimensional Mixmaster Models*, Jagellonian Univ. preprint TPJU-22/86.

[130] Y. ELSKENS, M. HENNEAUX, *Ergodic Theory of the Mixmaster Model in Higher Space-time Dimensions*, preprint Univ. de Bruxelles.

[131] V.A. BELINSKI, I.M. KHALATNIKOV, E.M. LIFCHITZ, *Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology*, Adv. Phys. 19 (1970) 525; *A general solution of the Einstein equations with a time singularity*, 31 (1982) 639.

[132] H. WEYL, *Eine neue Erweiterung der Relativitäts theorie*, Ann. der Phys. 59 (1919) 101 - 133.

[133] R. UTIYAMA, B.S. DE WITT, *Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields*, J. Math. Phys. 3 (1962) 608 - 618.

[134] B.S. DE WITT, *Quantum theory of gravity I, the canonical theory*, Phys. Rev. 160 (1967) 1113 - 1148; *The manifestly covariant theory II*, 162 (1967) 1195 - 1238; *Applications of the covariant theory III*, 1239 - 1255.

[135] K.S. STELLE, *Renormalization of higher derivative quantum gravity*, Phys. Rev. D16 (1977) 953 - 969.

[136] T. YONEYA, *Quantum gravity and the zero slope limit of the generalized Virasoro model*, Nuovo Cim. Lett. 8 (1973) 951 - 955; *Connection of dual models to electrodynamics and gravidynamics*, Progr. Theor. Phys. 51, (1974) 1907.

[137] J. SCHERK, J.H. SCHWARZ, *Dual model for non-hadrons* Nucl. Phys. B81 (1974) 118; *Dual model and the geometry of spacetime*, Phys. Lett. 52B (1974) 347.

[138] E.S. FRADKIN, A.A. TSEYTLIN, *Fields as excitations of quantized coordinates*, JETP Lett. 41 (1985) 206; Nucl. Phys. B216 (1985) 1; *Effective field theory from quantized strings*, Phys. Lett. 158B (1985) 316; *Effective action approach to superstring theory*, 160B (1985) 69; *Anomaly free two-dimensional chirial supergravity model*, 162B (1985) 295; *Non linear electrodynamics from quantized strings*, 163B (1985) 123.

[139] D.J. GROSS, J.A. HARVEY, E. MARTINEC, R. ROHM, Nucl. Phys. B256 (1985) 253; *Heterotic sting II. The interacting heterotic sting.* B267 (1986) 75.

[140] C.G. CALLAN, E.J. MARTINEC, M.J. PERRY, D. FRIEDAN, *Strings in background fields,* Nucl. Phys. B262 (1985) 593.

[141] B. ZWIEBACH, *Curvature squared terms and string theories*, Phys. Lett. 156B (1985) 315.

[142] A. SEN, *Heterotic sting in an arbitrary background field*, Phys. Rev. D32 (1985) 2102 - 2112; *Equations of motion for the heterotic string theory from the conformal invariance of the sigma model*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 1846 - 1849.

[143] D. GROSS, E. WITTEN, *Superstring modifications of Einstein's equations*, Nucl. Phys. B277 (1986) 1.

[144] M.D. FREEMAN, C.N. POPE, *β-function and superstring compactification*, Phys. Lett. 174B (1986) 48.

[145] M.T. GRISARU, D. ZANON, *Sigma-model superstring corrections to the Einstein-Hilbert action*, Phys. Lett. 177B (1986) 347 - 351.

[146] M.T. GRISARU, A.E.M. van de VEN, D. ZANON, *Four-loop β-function for the $N = 1$ and $N = 2$ supersymmetric non-linear sigma model in two dimensions*, Phys. Lett. 173B (1986) 423; Nucl. Phys. B277 (1986) 388 & 409.

[147] M.D. FREEMAN, C.N. POPE, M.F. SOHNIUS, K.S. STELLE, *Higher order σ-model counterterms and the effective action for superstrings*, Phys. Lett. 178B (1986) 199.

[148] S. DESER, A.N. REDLICH, *String induced gravity and ghost freedom*, Phys. Lett. 176B (1986) 350; erratum: 186 (1986) 461.

[149] S. SANNAN, *Gravity as the limit of the type II superstring theory*, Phys. Rev. D34 (1986) 1749 - 1758.

[150] Y. CAI, C. NUNEZ, *Heterotic string covariant amplitudes and low energy effective action*, Nucl. Phys. B287 (1987) 279.

[151] Y. KIKUCHI, C. MARZBAN, Y.G. NG, *Heterotic string modifications of Einstein's and Yang-Mills' actions*, Phys. Lett. 176B (1986) 57.

[152] Y. KIKUCHI, C. MARZBAN, *Low-energy effective Lagrangian of heterotic string theory,* Phys. Rev. D35 (1987) 1400 - 1403.

[153] R.R. METSAEV, A.A. TSEYTLIN, *Curvature cubed terms in string theory effective actions*, Phys. Lett. 185B (1987) 52 - 58.

[154] M.C. BENTO, N.E. MAVROMATOS, *Ambiguities in the low-energy effective actions of string theories with the inclusion of antisymmetric tensor and dilaton fields*, Phys. Lett. 190B (1987) 105 - 109.

[155] R. MYERS, *Superstring Gravity and Black Holes*, Santa Barbara preprint ITP-86-144.

[156] C. LANCZOS, *Elecktromagnetismus als natürliche Eigenschaft der Riemannschen Geometrie*. Z. Phys. 73 (1932) 147 - 168: *A remarkable property of the Riemann-Christoffel tensor in four (4) dimensions*, Ann. Math. 39 (1938) 842 - 850.

[157] H.A. BUCHDAHL, *On Eddington's higher order equations of the gravitational field*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 8 (1948) 89 - 94; *On the gravitational field equations arising from the square of the gaussian curvature*, Nuovo Cim. 123 (1962) 141.

[158] C. GREGORY, *Non-linear invariants and the problem of motion*, Phys. Rev. 72 (1947) 72.

[159] *Introduction to singular perturbations*, R.E. O'Malley, Academic Press, New-York, 1974.

[160] *Singular Perturbation Theory*, D.R. Smith, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1985.

[161] LL. BEL, in *Relativistic Action at a Distance: Classical and Quantum Aspects*, J. Llosa edt, Lecture Notes in Physics 162, Springer, Berlin, 1982.

[162] E. PECHLANER, R. SEXL, *On quadratic lagrangians in general relativity*, Comm. Math.

Phys. 2 (1966) 165 - 175.
[163] P. HAVAS, *On theories of gravitation with higher-order field equations*, Gen. Rel. Grav. 8 (1977) 631 - 645.
[164] H. von BORZESZKOWSKI, H.J. TREDER, W. YOURGRAU, *Gravitational field equations of fourth order and supersymmetry*, Ann. der Phys. 35 (1978) 471 - 480.
[165] K.S. STELLE, *Classical gravity with higher derivatives*, Gen. Rel. Grav. 9 (1978) 353 - 371.
[166] N.H. BARTH, S.M. CHRISTENSEN, *Quantizing fourth-order gravity theories: the functional integral*, Phys. Rev. D28 (1983) 1876 - 1883.
[167] D.R. NOAKES, *The initial value formulation of higher derivative gravity*, J. Math. Phys. 24 (1983) 1846 - 1850.
[168] P. TEYSSANDIER, P. TOURRENC, *The Cauchy problem for the $R + R^2$ theories of gravity without torsion*, J. Math. Phys. 24 (1983) 2793 - 2799.
[169] B. WHITT, *Fourth-order gravity as General Relativity plus matter*, Phys. Lett. 145B (1984) 176 - 178. S. CECOTTI, *Higher derivative supergravity is equivalent to standard supergravity coupled to matter*, Phys. Lett. 190B (1987) 86 - 92.
[170] H.A. BUCHDAHL, *Quadratic lagrangians and Palatini's device*, J. Phys. A12 (1979) 1229.
[171] S. KICHENASSAMY, *Lagrange multipliers in theories of gravitation*, Ann. of Phys. 168 (1986) 404.
[172] B. SAHID-SALESS, *First order formalism treatment of $R + R^2$ gravity*, Phys. Rev. D35 (1987) 467 - 470.
[173] J.D. BARROW, A.C. OTTEWILL, *The stability of general relativistic cosmological theory*, J. Phys. A16 (1983) 2757 - 2776.
[174] T.V. RUZMAIKHINA, A.A. RUZMAIKHIN, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 57 (1969) 680 [Sov. Phys. JETP 30 (1970) 372].
[175] H. NARIAI, *On the removal of initial singularity in a Big-Bang universe in terms of a renormalized theory of gravitation*, I, Progr. Theor. Phys. 46 (1971) 433 - 438.
[176] H. NARIAI, K. TOMITA, *loc. cit.* II, Progr. Theor. Phys. 46 (1971) 776.
[177] K.I. MACRAE, R.J. RIEGERT, *Effect of curvature-squared terms on cosmology*, Phys. Rev. D24 (1981) 2555 - 2560.
[178] A.A. STAROBINSKY, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Phys. Lett. 91B (1980) 99; Sov. Astron. Lett. 9 (5) (1983) 302.
[179] A. VILENKIN, *Classical and quantum cosmology of the Starobinsky inflationary model*, Phys. Rev. D32 (1985) 2511 - 2521.
[180] L. KOFMAN, A. LINDE, A.A. STAROBINSKY, *Inflationary universe generated by the combined action of a scalar field and gravitational vacuum polarization*, Phys. Lett. 157B (1985) 361.
[181] M.B. MIJIC, M.S. MORRIS, W.M. SUEN, *The R^2 cosmology: inflation without a phase transition*, Phys. Rev. D34 (1986) 2934 - 2946.
[182] S. GOTTLÖBER, V. MÜLLER, *Vacuum Polarization and the Initial Conditions of the Cosmological Evolution*, Babelsberg preprint, PRE-ZIAP 86 - 16.
[183] V.T. GUROVICH, *Quantum effects and the Friedmann model*, Sov. Phys. JETP 46 (1977) 193.
[184] L.H. FORD, D.J. TOMS, *Dynamical symmetry breaking due to radiative corrections in cosmology*, Phys. Rev. D25 (1982) 1510 - 1518.
[185] A.A. RUZMAIKHIN, Astrophys. 13 (1977) 1186.
[186] K. TOMITA, T. AZUMA, H. NARIAI, Progr. Theor. Phys. 60 (1978) 403.
[187] V.T. GUROVICH, A.A. STAROBINSKY, *Quantum effects and regular cosmological models*, Sov. Phys. JETP 50 (1979) 844.

[188] H.A. BUCHDAHL, *The field equations generated by the square of the scalar curvature: solutions of Kasner type*, J. Phys. A 11 (1978) 871 - 873.
[189] V. MÜLLER, *Bianchi I cosmological models for gravitational field equations of fourth order*, Ann. der Phys. 7 (1986) 67.
[190] Ll. BEL, H. SIROUSSE-ZIA, *Regular reduction of relativistic theories of gravitation with a quadratic lagrangian*, Phys. Rev. D32 (1985) 3128 - 3135.
[191] Ll. BEL, *Predictivisation spontanée des systèmes dynamiques héréditaires*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 294 (1982) 463.
[192] Ll. BEL, J.L. BOULANGER, N. DERUELLE, *Fabry-Pérot Cavities as a Paradigm for the Dynamics of Systems with Delays*, to appear in Phys. Rev. A.
[193] H. VERMEIL, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1917) 334.
[194] E. CARTAN, *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. de Math. Pures et Appl. 1 (1922) 141 - 203.
[195] D. LOVELOCK, *The Einstein tensor and its generalizations*, J. Math. Phys. 12 (1971) 498 - 501.
[196] *Tensors, Differential Forms, and Variational Principles*, D. Lovelock, H. Rund, Wiley-Interscience, New-York, 1975.
[197] F. MÜLLER-HOISSEN, *Spontaneous compactification with quadratic and cubic curvature terms*, Phys. Lett. 163B (1985) 106 - 110.
[198] J.G. Mc CARTHY, H.R. PAGELS, *General relativity as the surface action of a five dimensional gauge theory*, Nucl. Phys. B266 (1986) 687.
[199] K. ISHIKAWA, Y. OKHUWA, *Gauge Theory of Gravitation in Higher-Dimensional Space-Time and its Dimensional Reduction*, Osaka University preprint OU-HET99, 1986.
[200] B. ZUMINO, *Gravity theories in more than four dimensions*, Phys. Rep. 137 (1986) 109.
[201] C. ARAGONE, *Geometric stringy gravity*, Phys. Lett. B186 (1987) 151 - 156. M. ARIK, T. DERELI, *Euler-Poincaré Lagrangians and Kaluza-Klein theory*, Phys. Lett. 189B (1987) 96 - 98.
[202] R. BACH, *Zur Weylshen Relativitäts theorie und der Weylschen Erweiterung des Krümmungstensorbegriffs*, Math. Z. 9 (1921) 110 - 135.
[203] R.C. MYERS, *Higher Derivative Gravity, Surface Terms and String Theory*, Phys. Rev. D86 (1987) 392.
[204] M. DUBOIS-VIOLETTE, J. MADORE, *Conservation laws and integrability conditions for gravitational and Yang-Mills field equations*, J. Comm. Math. Phys. 108 (1987) 213.
[205] J. MADORE, *Conserved Quantities for Generalised Lagrangians*, Université d'Orsay preprint, 1987.
[206] D.G. BOULWARE, S. DESER, *String generated gravity models*, Phys. Rev. Lett. 55 (1985) 2656 - 2660.
[207] D.L. WILTSHIRE, *Spherically symmetric solutions of Einstein-Maxwell theory with a Gauss-Bonnet term*, Phys. Lett. 169B (1986) 36.
[208] M. HENNEAUX, P. SPINDEL, communication privée.
[209] A. TOMIMATSU, H. ISHIHARA, *Non-Linear Wave Propagation in Gravity Theory with the General Lovelock Lagrangian*, Prog. Theor. Phys. 77 (1987) 1014 - 1018.
[210] F. MÜLLER-HOISSEN, *Note on Generalized Kaluza-Klein Field Equations*, Göttingen University preprint ITP-86/6.
[211] J.T. WHEELER, *Symmetric solutions to the maximally Gauss Bonnet extended Einstein equations*, Nucl. Phys. B273 (1986) 732 - 748. *Symmetric solutions to the Gauss-Bonnet extended Einstein equations*, Nucl. Phys. B268 (1986) 737 - 746.
[212] C. TEITELBOIM, J. ZANELLI, *Dimensionally continued topological gravitation theory in hamiltonian form*, Class. Quant. Grav. 4 (1987) L 125 - 130.
[213] G.W. GIBBONS, P.J. RUBACK, *Classical gravitons and thein stability in higher dimensions,*

Phys. Lett. B171 (1986) 390.

[214] J. MADORE, *Kaluza-Klein theory with the Lanczos Lagrangian*, Phys. Lett. 110A (1985) 289 - 292.

[215] J. MADORE, *On the nature of the initial singularity in a Lanczos cosmological model*, Phys. Lett. 111A (1985) 283 - 284.

[216] J. MADORE, *Cosmological applications of the Lanczos lagrangian*, Class. Quant. Grav. 3 (1986) 361 - 372.

[217] N. DERUELLE, J. MADORE, *On the vanishing of the cosmological constant*, Phys. Lett. 114A (1986) 185 - 190.

[218] F. MÜLLER-HOISSEN, *Dimensionally continued Euler forms: Kaluza-Klein cosmology and dimensional reduction*, Class. Quant. Grav. 3 (1986) 665 - 677.

[219] N. DERUELLE, J. MADORE, *The Friedmann universe as an attractor of a Kaluza-Klein cosmology*, Mod. Phys. Lett. 1A (1986) 237 - 253.

[220] N. DERUELLE, J. MADORE, *A smooth oscillating cosmological solution*, Phys. Lett. 186B (1987) 25.

[221] F. MÜLLER-HOISSEN, *Compactification with* $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ *symmetry in* $d = 11$ *Kaluza-Klein theories*, Class. Quant. Grav. 3 (1986) L 133 - 140.

[222] R. KERNER, *Kaluza-Klein cosmology with double compactification*, p. 271 - 276 in *Origin and Early History of the Universe*, (ref. [7]).

[223] C. WETTERICH, *Spontaneous compactificatin in higher dimensional gravity*, Phys. Lett. 113B (1982) 377 - 381.

[224] A.H. BUCHDAHL, *On a lagrangian for non-minimally coupled gravitational and electromagnetic fields*, J. Phys. A12 (1979) 1037.

[225] R. KERNER, *Non-Linear Electrodynamics Derived from the Kaluza-Klein Theory*, LPTPE preprint 1987.

[226] K. ISHIKAWA, *Mass spectrum of the* $M_4 \times S^D$ *solution in Euler invariant type higher derivative gravity*, Phys. Lett. 188B (1987) 186 - 192.

[227] S. MIGNEMI, *Spontaneous Compactification in Six Dimensional Einstein Lanczos Maxwell Theory*, ICTP preprint, Trieste, 1986.

[228] P. CANDELAS, G.T. HOROWITZ, A. STROMINGER, E. WITTEN, *Vacuum configurations for superstrings*, Nucl. Phys. B258 (1985) 46.

[229] N. DERUELLE, J. MADORE, *Kaluza-Klein cosmology with the Lovelock lagrangian*, p. 277 - 282, in *Origin and Early History of the Universe*, (ref. [7]).

[230] D. BAILIN, A. LOVE, *Cosmological instability in ten-dimensional supergravity*, Phys. Lett. 163B (1985) 135 - 139.

[231] D. BAILIN, A. LOVE, D. WONG, *Supergravity limit of superstring theory and Friedmann Roberton Walker cosmology*, Phys. Lett. 165B (1985) 270 - 274.

[232] K. MAEDA, *Attractor in a Higher Dimensional Cosmology*, SISSA preprint 55/85/A Trieste.

[233] K. MAEDA, *Cosmological solutions with Calabi-Yau compactification*, Phys. Lett. 166B (1986) 59.

[234] K. MAEDA, *Attractor in a Superstring Model*, ICTP preprint 63/85/A Trieste.

[235] K. MAEDA, *Our Universe as a Attractor in a Superstring Model*, ICTP preprint IC/86/3/5 Trieste.

[236] S.R. LONSDALE, I.G. MOSS, *A superstring cosmological model*, Phys. Lett. 189B (1987) 12 - 16.

[237] K. MAEDA, *A history of the universe in a superstring model*, p. 313 - 318 in *Origin an Early History of the Universe*, (ref. [7]).

[238] K. MAEDA, M.D. POLLOCK, *On Inflation in the Heterotic String Model*, Phys. Lett. 173B (1986) 251.

[239] M. YOSHIMURA, *Cosmology with Ricci-Flat Compactification*, KEK preprint 85 - 61.
[240] D. WONG, *Cosmology and superstrings*, PhD Thesis, University of Sussex, 1987.
[241] H. ISHIHARA, *Cosmological Solution of the Extended Einstein Gravitation with the Gauss-Bonnet Term*, Nagoya University preprint DPNU 86 - 14.
[242] A.B. HENRIQUES, *Higher dimensional cosmological solutions with generalized Einstein equations*, Nucl. Phys. B277 (1986) 621 - 633.
[243] Q. SHAFI, C. WETTERICH, *Cosmology from higher-dimensional gravity*, Phys. Lett. 129B (1983) 387.
[244] L. FARINA-BUSTO, *Queen Mary College*, travail en cours.

Manuscript received: September 23, 1987